



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 07 FEBRUARIE 2026
CLASA A VIII - A

PROBLEMA 1 (25 puncte)

Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + |2x + y - 14| = 3y(2x - 3y)$.

PROBLEMA 2 (25 puncte)

În cubul $ABCD A' B' C' D'$, fie M mijlocul lui $A' B'$.

- a) Arătați că $MD = 3A'M$.
b) Dacă x este măsura unghiului dintre dreptele MD și BC , arătați că numărul $\cos x$ este rațional.

PROBLEMA 3 (20 puncte)

Se consideră piramida $VABCD$ cu toate muchiile congruente și baza patrulaterul convex $ABCD$. Arătați că $ABCD$ este pătrat.

(din Suplim. GM nr.9/ 2025, ex. S:E25.253).

PROBLEMA 4 (20 puncte)

Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$[\sqrt{1 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 5}] + \dots + [\sqrt{(2n-1)(2n+1)}] = 5625,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Punctajul maxim total este de 100 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 07 FEBRUARIE 2026
CLASA A VIII – A
BAREM DE EVALUARE

PROBLEMA 1 (25 puncte)

Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + |2x + y - 14| = 3y(2x - 3y)$.

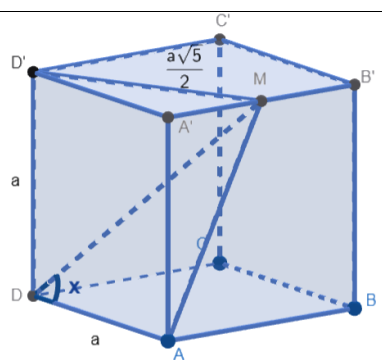
SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
Relația devine succesiv:	
$x^2 + 2x + y - 14 = 6xy - 9y^2$	5p
$x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + y - 14 = 0$	5p
$(x - 3y)^2 + 2x + y - 14 = 0$	5p
Cum $(x - 3y)^2 \geq 0$ și $ 2x + y - 14 \geq 0$,	3p
obținem că $(x - 3y)^2 = 0$ și $ 2x + y - 14 = 0$,	3p
deci $x - 3y = 0$ și $2x + y - 14 = 0$.	1p
Rezolvând sistemul obținem $x = 6, y = 2$	3p

PROBLEMA 2 (25 puncte)

În cubul $ABCD A' B' C' D'$, fie M mijlocul lui $A' B'$.

a) Arătați că $MD = 3A'M$.

b) Dacă x este măsura unghiului dintre dreptele MD și BC , arătați că numărul $\cos x$ este rațional.

SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
<p>Notăm $a = AB$.</p> <p>a) Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle A' M D'$, obținem $MD' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$</p>	 <p>5p</p>

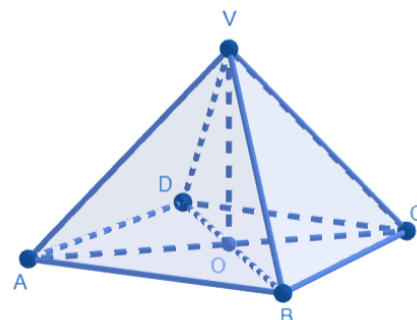


Cum $DD' \perp (D'A'B') \Rightarrow \angle DD'M = 90^\circ$.	4p
În $\triangle DD'M$, $DM^2 = DD'^2 + D'M^2 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{3a}{2} = 3A'M$	4p
b) $x = m(\angle(MD, BC)) = m(\angle(MD, DA)) = m(\angle ADM)$	5p
$DA \perp (ABA') \Rightarrow DA \perp AM$, deci în $\triangle ADM$, cu $\hat{A} = 90^\circ$, avem: $\cos x = \frac{DA}{DM} = a: \frac{3a}{2} =$ $= a \cdot \frac{2}{3a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Rightarrow \cos x \in \mathbb{Q}$.	7p

PROBLEMA 3 (20 puncte)

Se consideră piramida $VABCD$ cu toate muchiile congruente și baza patrulaterul convex $ABCD$. Arătați că $ABCD$ este pătrat.

(din Suplim. GM nr.9 / 2025, ex. S:E25.253).



SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
Din ipoteză rezultă că $ABCD$ este romb.	5p
Ducem $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Se demonstrează că $\triangle VAO \equiv \triangle VBO \equiv \triangle VCO \equiv \triangle VDO$ (cazul C.I.), de unde rezultă că $OA \equiv OB \equiv OC \equiv OD$.	7p
Deducem că $ABCD$ este inscriptibil, deci $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. Dar $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BCD}$, pentru că $ABCD$ este romb. Rezultă că $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. $ABCD$ este romb cu un unghi de $90^\circ \Rightarrow$ e pătrat.	8p



PROBLEMA 4 (20 puncte)

Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$[\sqrt{1 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 5}] + \dots + [\sqrt{(2n-1)(2n+1)}] = 5625,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

SOLUȚIE/BAREM	Punctaj
Demonstrăm că $[\sqrt{(2k-1)(2k+1)}] = 2k-1$, pentru oricare $k \in \mathbb{N}^*$.	6p
<p>Aceasta este echivalent cu :</p> $2k-1 \leq \sqrt{(2k-1)(2k+1)} < 2k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4k^2 - 4k + 1 \leq 4k^2 - 1 < 4k^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4k + 1 \leq -1 < 0, \text{ adevărat pentru } k \geq 1$	6p
<p>Atunci ecuația devine :</p> $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = 5625 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + \dots + (2n - 1) = 5625 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) - n = 5625 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = 5625 \Leftrightarrow n^2 = 5625 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 75$	8p